Matematika, 1993, Jilid 9, bil. 1, hal. 23-27


# PENENTUAN BILANGAN SAMBUNGAN DALAM MESIN HIPERKUBUS MENERUSI PERSAMAAN BEZA

OLEH
BAHROM SANUGI

Jabatan Matematik
Universiti Teknologi Malaysia
Karung Berkunci 791,
80990 Johor Bahru, Johor.

**Abstrak.** Persamaan beza telah banyak digunakan dalam memodelkan masalah diskret. Kertas ini mengemukakan suatu penggunaan masalah beza bagi menentukan bilangan sambungan dalam satu mesin hiperkubus. Beberapa maklumat mengenai sambungan hiperkubus dan terminologi yang berkaitan dihurai sebelum persamaan beza yang berkaitan diterbitkan. Penyelesaian yang diperolehi sah untuk sebarang bilangan pemproses dalam hiperkubus yang ditentukan.

## 1. PENGENALAN

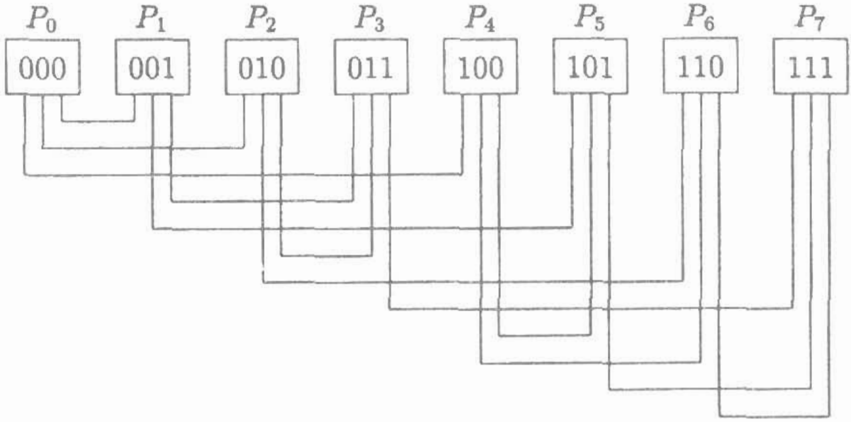
Hiperkubus atau "hypercubes" adalah salah satu istilah yang digunakan untuk menamakan sejenis senibina komputer SIMD (Single Instruction Stream, Multiple Data Stream) yang pada umumnya terdiri daripada sebilangan pemproses (katalah N) dan dengan bilangan yang sama bagi laluan aliran data (lihat, misalnya, Akl [1]). Dalam komputer jenis ini pemproses-pemproses bekerja secara sinkronos. Mereka melaksanakan arahan yang serupa tetapi terhadap data yang berbeza.

Bagi tujuan komunikasi di antara pemproses-pemproses, mesin dengan berbilang pemproses itu perlu dihubungkan di antara satu dengan sebahagian yang lainnya. Sebenarnya, dalam senibina SIMD ada terdapat beberapa cara penyambungan untuk tujuan komunikasi data dan hasil. Salah satu cara penyambungan itulah yang menghasilkan hiperkubus.

## 2. Ciri Sambungan Dalam Hiperkubus

Penyambungan mesin SIMD dalam kelompok hiperkubus dapat dijelaskan seperti berikut:

Misalkan terdapat $N(= 2^q)$ pemproses yang ditandai oleh $P_0, P_1, ..., P_{N-1}$ ($q$ suatu integer positif). Suatu hiperkubus berdimensi $q$ diperolehi dengan menyambung setiap pemproses kepada $q$ pemproses lain (jirannya). $q$ pemproses jiran ($P_j$) bagi pemproses $P_i$ ditakrifkan pula seperti berikut:




Rajah 1. Sambungan Kubus (q=3)

Perwakilan binari bagi $j$ didapati dengan cara mengubah satu bit daripada perwakilan binari untuk $i$.

Contohnya, untuk hiperkubus berdimensi 3 kita ada 8 pemproses ditandai dengan $P_0, P_1, ..., P_7$. Dalam kes ini setiap pemproses mempunyai 3 jiran. Perhatikan sebagai contoh, pemproses $P_5$ dengan $i = 5$ mempunyai jiran yang ditentukan seperti berikut:

$$i = 5 = (101)_{\text{binari}}$$

Nilai-nilai terubah satu bit bagi 101 ialah 100, 111 dan 001, iaitu masing-masingnya bersamaan 4, 7 dan 1. Ini bermakna $j$ akan mengambil nilai-nilai j = 1, 4, 7. Oleh itu dalam membentuk jaringan komunikasi, pemproses $P_5$ perlu disambungkan dengan pemproses $P_1, P_4$ dan $P_7$. Begitulah halnya dengan pemproses-pemproses lain akan mempunyai kejiranannya sendiri.

Bagi $q = 3$ penyambungan di antara pemproses-pemproses ini dapat dijelaskan menerusi gambarajah seperti yang dapat dilihat dalam Rajah 1.

Persoalan yang hendak dibincangkan dalam kertas ini ialah "Berapakah banyaknya sambungan yang terdapat dalam satu hiperkubus berdimensi $q$? (Dinyatakan dalam sebutan q)."

Untuk menjawab pertanyaan ini, perhatikan jujukan $s_q$ yang merupakan bilangan sambungan dalam hiperkubus berdimensi $q$ seperti yang diberi dalam Jadual I.

Jadual 1

| Dimensi ($q$) | Bilangan pemproses ($2^q$) | Bilangan sambungan ($s_q$) |
|---|---|---|
| 1 | 2 | $1 = 1$ |
| 2 | 4 | $4 = 2 \times 1 + 2$ |
| 3 | 8 | $12 = 2 \times 4 + 4$ |
| 4 | 16 | $32 = 2 \times 12 + 8$ |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |

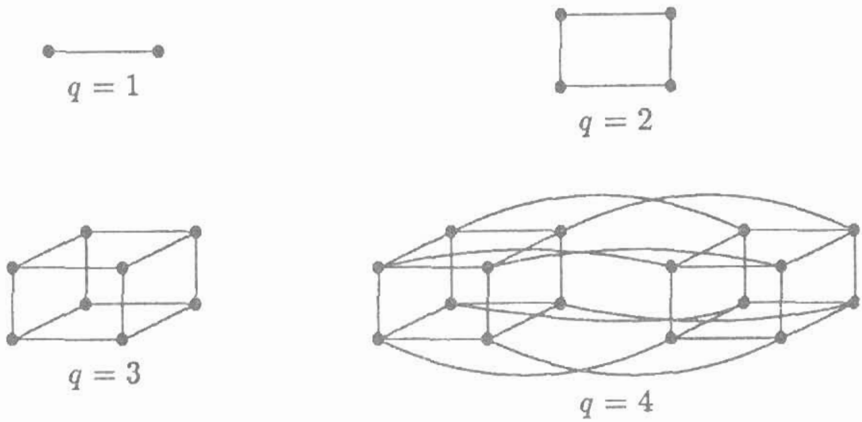
Perhatikan, bagi memudahkan kita membentuk jujukan $s_q$ untuk beberapa nilai permulaan $q$ kita boleh gambarkan sambungan-sambungan itu menerusi graf rangka seperti dalam Rajah 2.

Dari daftar di atas kita dapat camkan pola jujukan bagi nilai $s_q$ dan seterusnya dapat membentuk model dalam pernyataan persamaan beza,

$$s_q = 2s_{q-1} + 2^{q-1}$$

atau

$$s_{q+1} - 2s_q = 2^q \tag{1}$$




Rajah 2

## 3. Penyelesaian Persamaan Beza

Persamaan (1) adalah suatu persamaan beza linear peringkat pertama tak homogen. Penyelesaiannya dinyatakan sebagai

$$s_q = u_q + v_q$$

dengan $u_q$ adalah penyelesaian umum bagi persamaan homogen

$$u_{q+1} - 2u_q = 0 \tag{2}$$

dan $v_q$ adalah suatu penyelesaian khas bagi persamaan

$$v_{q+1} - 2v_q = 2^q \tag{3}$$

Penyelesaian bagi (2) adalah berbentuk

$$u_q = Ar^q \qquad (A \text{ pemalar sembarangan})$$

dengan $r$ adalah pensifar bagi persamaan polinomial yang disekutukan dengan (1), iaitu $P(r) = r - 2$ (lihat, sebagi contoh, Lambert [2], hlm. 9). Ini memberikan

$$u_q = A2^q$$

Untuk mendapatkan penyelesaian bagi persamaan (3) pula kita cuba penyelesaian berbentuk

$$v_q = Bq2^q$$

Gantikan $v_q$ ke dalam (3) akan memberikan $B = 1/2$ dan seterusnya $v_q = \frac{1}{2}q2^q = q2^{q-1}$. Dengan demikian penyelesaian bagi persamaan (1) boleh ditulis sebagai

$$s_q = A2^q + q2^{q-1}$$

Nilai awal $s_1 = 1$ memberikan $A = 0$.

## 4. KESIMPULAN

Analisis ini telah memperlihatkan bagaimana fenomena diskret dalam satu masalah gunaan dapat dimodelkan sebagai satu persamaan beza yang mengkaitkan pembolehubah bersandar dalam sebutan terdahulu dengan pembolehubah tak bersandar. Khususnya kita telah dapat menentukan bilangan sambungan dalam satu hiperkubus berdimensi $q$; iaitu terdapat $q2^{q-1}$ sambungan yang menghubungkan $2^q$ pemproses. Jika $q = 20$, kita perlu menghubungkan setiap satu dari 1,048,576 pemproses kepada 20 jirannya. Ini memerlukan 10,485,760 sambungan!

## 5. PENGHARGAAN

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Mohd Nor Mohamad kerana perbincangan dengan beliau mengenai penyelesaian persamaan beza yang muncul dalam kertas ini.

## RUJUKAN

[1]. S.G.Akl, "The Design and Analysis of Parallel Algorithms," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[2]. J.D.Lambert, "Kaedah Pengiraan Dalam Persamaan Pembeza Biasa (Terjemahan)," DBP, Kuala Lumpur, 1990.